Alumno ....

1. **(1,5 punto)**

Define los conceptos de retículo, retículo complementario. Enuncia la caracterización de los retículos distributivos. Describe un ejemplo de un retículo que no sea distributivo y otro que no sea complementario. Comprueba la siguiente igualdad de expresiones booleanas (x+y')(xy)'= y', utilizando las propiedades de las álgebras de Boole (indicando en cada paso la propiedad utilizada) y mediante una tabla de verdad.

Solución:
Un retículo no complementario es por ejemplo (D_{20} l) y uno que no sea distributivo es por ejemplo uno
de los que aparecen en la caracterización de los retículos distributivos.
Utilizando las leyes de Morgan luego la propiedad distributiva, conmutativa y las propiedades del complementario tenemos: (x+y')(xy)'= (x+y') (x'+y')=xx'+y'x'+xy'+yy'=y'(x'+x)=y'. La tabla de verdad es trivial.

2. **(1 punto)**

Una máquina tragaperras permite en cada jugada elegir un número del 0 al 16, asignando premio al número 11 y a todos los números comprendidos entre 0 y 9. Diseña una expresión mínima en forma de suma de productos que represente la jugada premiada.

Solución:

Si suponemos que entran el 0 y el 9 utilizando el mapa de Karnaugh obtenemos: x'+y'z'+y't
Si suponemos que no entran el 0 y el 9 análogamente tenemos: x'y+x'z+x't+y'zt+xy'z't'

3. **(1 punto)**

Se consideran 9 enteros positivos de la forma $2^m 3^n 5^p$. Demuestra que, al menos, el producto de dos de estos números es un cuadrado perfecto.

Solución:

Cualquiera de los 9 enteros será de la forma $2^m 3^n 5^p$. Cada uno de los exponentes m, n, p pueden ser par o impar, por tanto hay 8 configuraciones diferentes posibles de exponentes (m, n, p) atendiendo a la paridad. Como son 9 números, al menos dos de los 9 enteros tendrán las mismas paridades, por ejemplo (par, impar, impar). El producto de estos dos enteros

$$a\, b = (2^{m1}\, 3^{n1}\, 5^{p1}\,)\,(\,2^{m2}\, 3^{n2}\, 5^{p2}\,) = 2^{m1}\, 3^{n1}\, 5^{p1} = 2^{m1+m2}\, 3^{n1+n2}\, 5^{p1+p2} = 2^{2r}\, 3^{2s}\, 5^{2t},$$

tendrá TODOS los exponentes pares y será un cuadrado perfecto.

4. **(3 puntos)**

En la heladería de la playa venden helados de varios sabores: nata, menta, vainilla, fresa y chocolate. Tus amigos te encargan comprar helados para todos, 14 en total.
(a) Si repartes un helado a cada amigo, ¿de cuántas formas puedes hacerlo? ¿Y si en la compra falta el sabor chocolate?
(b) ¿Cuántas compras diferentes puedes realizar en las que haya al menos cuatro helados de menta?
(c) ¿Y si en la compra hay a lo sumo 5 de cada sabor?

Solución:

Observaciones: No se permiten calculadoras. Las respuestas no razonadas no se calificarán.

a) Un **reparto** de 14 helados entre los 14 amigos, **a cada amigo un helado**, es una lista con repetición. Por tanto $\mathbf{5^{14}}$**.**
Si en la compra falta el sabor chocolate, **al menos**, entonces habría $\mathbf{4^{14}}$ diferentes **repartos**.

Si en la compra falta **únicamente** el sabor chocolate, tendríamos que garantizar que en el reparto entren helados de los sabores de nata, menta, vainilla y fresa. En este caso el número de diferentes repartos sería:

$$4^{14}-\left[\binom{4}{1}3^{14}-\binom{4}{2}2^{14}+\binom{4}{3}1^{14}\right]$$

b) Una **compra** consiste en determinar el número de helados de cada tipo, por ejemplo "3 helados de fresa, 5 helados de menta y 7 de chocolate" por tanto si definimos las variables $x_i =$ número de helados de tipo i, el resultado es el número de soluciones enteras de :

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=14 \\ x_1 \le 4, x_i \le 0 \forall i \ne 1. \end{cases}$$

Esto es $\binom{14}{10}$

c) Si en la **compra** hay a lo sumo 5 de cada sabor entonces el resultado es el número de soluciones enteras de :

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=14 \\ 0 \le x_i \le 5, \forall i. \end{cases}$$

Esto es :

$$\binom{18}{14}-\left[\binom{5}{1}\binom{12}{8}-\binom{5}{2}\binom{6}{2}\right]$$

5. (1 punto) .

El parque de bomberos quiere organizar unas prácticas por equipos de forma que cada equipo realice la misma práctica pero en un barrio diferente. Si en total hay 40 bomberos y se deben formar 8 equipos de 4 bomberos cada uno de ellos, calcula el número de diferentes formas de organizar las prácticas.

Solución:
Si se forman 8 equipos, con 4 bomberos en cada equipo, necesitamos 32 personas que habrá que elegir de los 40 previamente. En este caso, teniendo en cuenta que cada equipo tiene asignado un barrio diferente el resultado es:

$$\binom{40}{32}\frac{32!}{(4!)^8}.$$

Si se consideran 8 equipos, con 5 bomberos en cada equipo, la solución es:

$$\frac{40!}{(5!)^8}.$$

6. (2,5 puntos) .

(a) Halla la solución general de la relación de recurrencia sin condiciones iniciales:

$$a_n - 3a_{n-2} + 2\,a_{n-3} = 6$$

Solución:

Observaciones: No se permiten calculadoras. Las respuestas no razonadas no se calificarán.

1. La ecuación característica es: $x^3 - 3x + 2 = 0$ y sus raíces son: 1, doble y -2 simple. La solución general de la ecuación homogénea:
$$h(n) = (A + Bn)1^n + C(-2)^n$$
2. La solución particular es $P(n) = Kn^2$. Imponiendo que es solución de la ecuación no homogénea se determina la constante *K,* quedando $P(n) = n^2$.
3. La solución general de la ecuación no homogénea es por tanto:
$$a_n = (A + Bn)1^n + C(-2)^n + n^2$$

(b) Halla una relación de recurrencia para el número de formas de apilar n fichas de póker de color rojo, blanco y azul en las que no aparezca una "roja" encima de una "blanca".

Solución:

Si n = 1, tenemos 8 pilas: $\underline{a}$ $\underline{b}$ $\underline{c}$

y si n = 2, tenemos 8 pilas: $\frac{a}{a}$ $\frac{a}{b}$ $\frac{a}{r}$ $\frac{b}{a}$ $\frac{b}{b}$ $\frac{b}{r}$ $\frac{r}{r}$ $\frac{r}{a}$

Las pilas de tamaño n que terminan en una ficha blanca o azul tendrán por debajo una pila correcta de tamaño n-1, por tanto, número de estas pilas es $2a_{n-1}$.

Por otro lado, las pilas de tamaño n que terminan en una ficha roja no pueden tener debajo una pila correcta de tamaño n-1 que termine en roja. Por tanto, el número las pilas de tamaño n que terminan en una ficha roja es $a_{n-1} - a_{n-2}$.

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} = 3a_{n-1} - a_{n-2}$$

(c) Halla la solución de la relación recurrencia lineal homogénea expresada en términos de senos y cosenos:

$$a_{n+2} + a_n = 0, \quad a_0 = 0 \text{ y } a_1 = 3$$

Solución:

Las ecuación característica es $x^2 + 1 = 0$ y sus raíces son *i* y *-i*. La solución general de la ecuación homogénea con condiciones iniciales es *h(n)* = $3\text{sen}\,\frac{n\pi}{2}$

Observaciones: No se permiten calculadoras. Las respuestas no razonadas no se calificarán.